Apellido y nombres: [redacted]
Padrón: [redacted]............. Correo electrónico: [redacted]
Cursada. Cuatrimestre: [redacted]. Año: [redacted]... Profesor: [redacted]

[redacted]

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Cuarta fecha. 20 de febrero de 2019.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b
[redacted]							

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.
(a) Hallar la función potencial de un campo de fuerzas, u, que verifica:

$$\begin{array}{rll} \nabla^2 u(x,y)=0 & \text{para} & x^2+y^2>1, \quad y>0 \\ u(x,0)=0 & \text{para} & |x|\geqslant 1 \\ u(x,y)=1 & \text{para} & x^2+y^2=1, \quad y>0 \end{array}$$

y calcular las equipotenciales y y las líneas de fuerza.
(b) Demostrar la convergencia de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^5}\,dx$ y calcularla, usando variable compleja.

Ejercicio 2.
(a) Resolver la ecuación de difusión $u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)$ para $0<x<\pi$ y $t>0$, con condiciones de contorno nulas y condición inicial $u(x,0)=\pi\,\mathrm{sen}(3x)$ para $0\leqslant x\leqslant\pi$. Hallar y graficar aproximadamente las dependencias temporales: $u_1=u(\pi/3,t)$,$u_2=u(\pi/2,t)$ y $u_3=u(2\pi/3,t)$.
(b) Calcular el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$, sabiendo que la serie de Fourier de senos de la función $f(t)=t(\pi-t)$ en $[0,\pi]$ es $\displaystyle\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\mathrm{sen}\left((2n-1)t\right)$.

Ejercicio 3.
(a) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con f absolutamente integrable y $g(t)=f(t-1)+f(-t-1)$. Mostrar que existe la transformada de Fourier de g y calcularla en términos de la transformada de Fourier de f.
(b) Calcular la transformada inversa de Fourier de cada una de las siguientes funciones:

$$i)\ F(w)=\frac{1}{1+iw} \qquad ii)\ F(w)=\frac{1}{(iw+1)^2+4}.$$

Ejercicio 4.
(a) Determinar si $f(t)=\begin{cases} te^{t^2} & \text{para } 0\leqslant t<1 \\ 0 & \text{para } t\geqslant 1 \end{cases}$ es de orden exponencial. Decidir si existe su transformada de Laplace y en caso afirmativo, calcular su valor en cero.
(b) Resolver el sistema:

$$\begin{cases} (x'*y)(t)+\mathrm{sh(t)H(t)}=0 \\ (x*y)(t)-\mathrm{sh(t)H(t)}=0 \end{cases}$$

con $x(0^+)=1$ y $H(t)$ la función de Heaviside.